Riscrivibilità nei gruppi: su di un suggerimento di Aldo de Luca

Mercede MAJ

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI SALERNO

Giornate di informatica teorica in memoria di Aldo de Luca

Dipartimento di Matematica "Guido Castelnuovo", Sapienza Università Roma

Luglio 11-12, 2019

Dedicato alla memoria di

Aldo de Luca

con affetto e gratitudine

Definizione

Siano S un semigruppo, n un intero $n \geq 2$.

Definizione

$$S \ \textit{totalmente} \ n - \textit{riscrivibile} \ (S \in P_n)$$

se, per ogni n-pla $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *di elementi di* S*, esiste una permutazione* $\sigma \neq id$ *di* $\{1, 2, \cdots, n\}$ *tale che*

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Example

$$S \in P_2 \iff S \ \textit{commutativo}$$

$$P_2 \subseteq P_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$P = \bigcup_{n>1} P_n$$

Definizione

Example

$$S \in P_2 \iff S \ commutativo$$

$$P_2 \subseteq P_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$P = \bigcup_{n>1} P_n$$

Definizione

Example

$$S \in P_2 \iff S \ \textit{commutativo}$$

$$P_2 \subseteq P_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$P = \bigcup_{n>1} P_n$$

Osservazioni

Osservazione

Sia S finito con $|S| = n$, allora $S \in P_{n+1}$.

Pertanto

S finito $\Rightarrow$ $S \in P$

Osservazioni

Osservazione

Sia S finito con $|S| = n$, allora $S \in P_{n+1}$.

Pertanto

$$S \text{ finito} \Rightarrow S \in P$$

Primo risultato

Theorem [**A. Restivo, C. Reutenauer**]

Sia S un semigruppo periodico e finitamente generabile.

Se $S \in P$, allora S è finito.

A. Restivo, C. Reutenauer, On the Burnside problem for semigroups, *J. Algebra* **89** (1984), 102-104.

Problema

Problema [Aldo de Luca]

Cosa si può dire se G è un gruppo e

$$G \in P?$$

Osservazione

Sia G un gruppo finito con $|G| = n$, allora $G \in P_n$.

Problema

Problema [Aldo de Luca]

Cosa si può dire se G è un gruppo e

$$G \in P?$$

Osservazione

Sia G un gruppo finito con $|G| = n$, allora $G \in P_n$.

Osservazione

Proposizione 1

Se un gruppo G possiede un sottogruppo normale abeliano A con $|G/A| = m$, allora

$$G \in P_{2m}.$$

Corollario

$$G \text{ abeliano-per-finito} \;\Rightarrow\; G \in P$$

Definizione

Un gruppo G viene detto abeliano-per-finito se esiste un sottogruppo A normale in G con A abeliano e G/A finito.

Osservazione

Proposizione 1

Se un gruppo G possiede un sottogruppo normale abeliano A con $|G/A| = m$, allora

$$G \in P_{2m}.$$

Corollario

$$G \text{ abeliano-per-finito} \;\Rightarrow\; G \in P$$

Definizione

Un gruppo G viene detto abeliano-per-finito se esiste un sottogruppo A normale in G con A abeliano e G/A finito.

Dimostrazione della Proposizione 1

Sia $n = 2m$ e sia $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una n-pla di elementi di G.

Si considerino gli elementi:

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = x_1,\ \alpha_2 = x_1x_2,\ \cdots, \alpha_i = x_1x_2\cdots x_i,\ \cdots, \alpha_n = x_1x_2\cdots x_n.$$

Essendo $|G/A| = m$, esistono i, j, k , $0 \leq i < j < k \leq n$ tali che

$$\alpha_i A = \alpha_j A = \alpha_k A.$$

Allora $x_{i+1}\cdots x_j \in A$, $x_{j+1}\cdots x_k \in A$,
pertanto $x_{i+1}\cdots x_j \in A$, $x_{j+1}\cdots x_k$ sono permutabili e si ha

$$x_1\cdots x_n = x_1\cdots x_i x_{j+1}\cdots x_k x_{i+1}\cdots x_j x_{k+1}\cdots x_n.$$

$\square$

Gruppi finitamente generabili in P

Teorema 2 [M. Curzio, P. Longobardi, –]

Sia G un gruppo finitamente generabile.

$G \in P$ se e solo se G è abeliano-per-finito.

M. Curzio, P. Longobardi, –, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, *Atti Acc. Lincei* **74** (1983), 136-142.

Proposizione 3

Se un gruppo G possiede un sottogruppo normale A con $A \in P_s$ e $|G/A| = m$, allora

$$G \in P_{sm}.$$

Proposizione 4

$$G \text{ finito-per-abeliano} \Rightarrow G \in P$$

Osservazioni

Proposizione 3

Se un gruppo G possiede un sottogruppo normale A con $A \in P_s$ e $|G/A| = m$, allora

$$G \in P_{sm}.$$

Proposizione 4

$$G \text{ finito-per-abeliano } \Rightarrow G \in P$$

Osservazioni

Definizione

Un gruppo G viene detto finito-per-abeliano se esiste un sottogruppo N normale in G con N finito e G/N abeliano.

Equivalentemente

Un gruppo G è finito-per-abeliano se il derivato G' è finito.

Proposizione 4

Se il derivato G' ha ordine m, allora

$$G \in P_{m+1}.$$

Dimostrazione della Proposizione 4

Sia $n = m + 1$ e sia $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ una n-pla di elementi di G. Si vuol provare che esiste una permutazione σ non banale tale che

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Se $2 \leq j \leq n$, esiste un elemento $d_j \in G'$ tale che

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_n x_{n-1} \cdots x_{j+1} x_j)(x_1 x_2 \cdots x_{j-1}) d_j$$

Se esiste j tale che $d_j = 1$ si ha il risultato. Sia allora $d_j \neq 1$ per ogni j. Essendo $|G' \setminus \{1\}| = m - 1 = n - 2$, esistono interi k, l, $2 \leq k < l \leq n$ tali che $d_k = d_l$. Si ponga $d = d_k = d_l$. Allora si ha

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (x_n x_{n-1} \cdots x_{l+1} x_l)(x_1 x_2 \cdots x_{l-1}) d =$$

$$= (x_n x_{n-1} \cdots x_{l+1} x_l \cdots x_{k+1} x_k)(x_1 x_2 \cdots x_{k-1}) d.$$

Ne segue

$$x_1 x_2 \cdots x_{l-1} = (x_{l-1} \cdots x_k)(x_1 x_2 \cdots x_{k-1}).$$

Moltiplicando a destra per $x_l x_{l+1} \cdots x_n$ si ha l'asserto.

Gruppi nella classe P

Teorema 3 [**M. Curzio, P. Longobardi, –, D.J.S. Robinson**]

Sia G un gruppo e sia N un sottogruppo normale di G tale che

$$|G/N| = t \text{ e } |N'| = m.$$

Allora $G \in P_n, \ con \ n = (m+1)t.$

M. Curzio, P. Longobardi, –, D.J.S. Robinson, On a permutational property of groups , *Arch. Math.* **44** (1985), 385-389.

Gruppi nella classe P

Teorema 5 [M. Curzio, P. Longobardi, –, D.J.S. Robinson]

$$G \in P$$

se e solo se

G è finito-per-abeliano-per-finito.

Definizione

Un gruppo G viene detto finito-per-abeliano-per-finito se esiste un sottogruppo N normale in G con N' finito e G/N finito.

M. Curzio, P. Longobardi, –, D.J.S. Robinson, On a permutational property of groups , *Arch. Math.* **44** (1985), 385-389.

Gruppi nella classe P_n

Osservazione

$G \in P_2$ se e solo se G è abeliano.

Teorema 6 [M. Curzio, P. Longobardi, –]

$G \in P_3$ se e solo se $|G'| \leq 2$.

M. Curzio, P. Longobardi, –, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, *Atti Acc. Lincei* **74** (1983), 136-142.

Gruppi nella classe P_n

Teorema 7

$$G \in P_4 \Rightarrow G' \text{ è abeliano}$$

Osservazione

I gruppi di ordine dispari in P_4 sono stati descritti da **G. Higman** .
È dovuta a **P. Longobardi, – , S.E. Stonehewer** una completa descrizione dei gruppi $G \in P_4$.

P. Longobardi, S.E. Stonehewer, Finite 2-groups of class 2 in which every product of four elements can be reordered, *Illinois J. of Math* **35** (1991), 198-219.

Gruppi nella classe P_n

Teorema 7

$$G \in P_4 \Rightarrow G' \text{ è abeliano}$$

Osservazione

I gruppi di ordine dispari in P_4 sono stati descritti da **G. Higman** .
È dovuta a **P. Longobardi, – , S.E. Stonehewer** una completa descrizione dei gruppi $G \in P_4$.

P. Longobardi, S.E. Stonehewer, Finite 2-groups of class 2 in which every product of four elements can be reordered, *Illinois J. of Math* **35** (1991), 198-219.

Gruppi nella classe P_n

Problema

Qual è il massimo intero n tale che
$G \in P_n$ implica G risolubile?

Problema [J. Alperin, Oxford 1984]

Qual è il minimo n tale che esista in
P_{n+1} un gruppo semplice non abeliano?

Soluzione del problema di Alperin

Theorem [R. Blyth, D.J.S. Robinson]

Se $G \in P_7$,
allora G è risolubile.

Remark

$$A_5 \in P_8$$

R.D. Blyth, D.J.S. Robinson , Solution of the solubility problem for rewritable groups, *J. London Math. Soc.* **41** (1990), 438-444.

Definizione

Siano G un gruppo, n un intero $n \geq 2$.

Definizione

$$G \quad n - \textit{riscrivibile} \ (G \in Q_n)$$

se, presi $x_1, x_2, \cdots, x_n \in G$, *esistono permutazioni distinte* σ, τ *di* $\{1, 2, \cdots, n\}$ *tali che*

$$x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} = x_{\tau(1)} x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n)}.$$

Definizione

Example

$$G \in Q_2 \iff G \ abeliano$$

$$Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$Q = \bigcup_{n>1} Q_n.$$

Definizione

Example

$$G \in Q_2 \iff G \ abeliano$$

$$Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$Q = \bigcup_{n>1} Q_n.$$

Definizione

Example

$$G \in Q_2 \iff G \ abeliano$$

$$Q_2 \subseteq Q_3 \subseteq \cdots$$

Definizione

$$Q = \bigcup_{n>1} Q_n.$$

Osservazioni

Osservazione

$$G \in Q_2 \iff G \text{ è abeliano} \iff G \in P_2$$

Osservazione

$$P_n \subseteq Q_n$$

Problema

Cosa succede se $n > 2$?

Le classi P_n e Q_n

Osservazione [R. Blyth]

Se $|G'| < n!$,
allora $G \in Q_n$.

Remark

Pertanto $S_3 \in Q_3$ e $S_3 \notin P_3$.

R.D. Blyth, Rewriting products of group elements, *J. Algebra.* **116** (1988), 506-521.

Le classi P_n e Q_n

Teorema [D.S. Passman]

Sia $G = S_n$, $n \geq 3$,
allora G soddisfa Q_n, ma G non soddisfa P_n.

Remark

Pertanto $P_n \subset Q_n$ se $n > 2$.

D.S. Passman , Permutational and rewritable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 995-1003.

Le classi P e Q

Teorema [R. Blyth]

Un gruppo G ha la proprietà Q

se e solo se

G è finito-per-abeliano-per-finito.

Corollario

Un gruppo G ha la proprietà Q

se e solo se

G ha la proprietà P.

R. Blyth , Rewriting products I, *J. Algebra* **116** (1988), 506-521.

Le classi P_n e Q_n

Teorema [M.I. Elashiry, D.S. Passman]

Sia n un intero positivo.
Esistono funzioni $a(n)$ e $b(n)$ a valori interi tali che

se G ha la proprietà Q_n ,

allora

G ha un sottogruppo normale N tale che
$|G/N| \leq a(n)$, e $|N'| \leq b(n)$.

M.I. Elashiry, D.S. Passman, Rewritable groups, *J. Algebra* **345** (2011), 190-201.

Corollario

Esiste una funzione $c(n)$ a valori interi tale che

se G ha la proprietà Q_n ,

allora

G ha la proprietà $P_{c(n)}$.

D.S. Passman, Permutational and rewritable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 995-1003.

Gruppi nella classe Q_n

Problema

Qual è il massimo intero n tale che $G \in Q_n$ implica G risolubile?

Problema

Qual è il minimo n tale che esista in Q_{n+1} un gruppo semplice non abeliano?

Le classi P_n e Q_n

Theorem [R. Blyth]

Se $G \in Q_4$,
allora G è risolubile.

Remark

$$A_5 \in Q_5$$

R.D. Blyth , Rewriting products of group elements II, *J. Algebra* **119** (1988), 246-259.

Definizione

Sia G un gruppo

Definizione

Si definisce grado di permutazione $p(G)$

$$p(G) = min\{n \mid G \ \ ha \ \ P_n\}.$$

Definizione

Si definisce grado di riscrivibilità $q(G)$

$$q(G) = min\{n \mid G \ \ ha \ \ Q_n\}.$$

Le classi P_n e Q_n

Theorem [D.S. Passman]

Per ogni $n \geq 2$ *si ha*

$$q(S_n) = n.$$

Esempio

Per ogni $n \geq 2$ esiste un gruppo risolubile G_n tale che

$$p(G_n) = n.$$

D.S. Passman, Permutational and rewritable groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **147** (2019), 995-1003.

Definizioni

Siano G un gruppo, n un intero $n > 1$. Se $X \subseteq G$, si ponga:

$$X^n = \{a_1 a_2 \cdots a_n \mid a_i \in X\}.$$

Ovviamente se $|X| = n$ allora $|X^n| \leq n^n$.

Se $G \in Q_n$, allora,
per ogni sottoinsieme $X \subseteq G$ con $|X| = n$, si ha $|X^n| < n^n$.

Definizione

Un gruppo G vien detto n-collapsing
se $|X^n| < n^n$, per ogni $X \subseteq G$, $|X| = n$.

Definizione

Definizione

Un gruppo G vien detto collapsing
se G è n-collapsing, per qualche n.

Esempi

Se $G \in Q$, allora G è collapsing.

Se G ha esponente finito, allora G è collapsing.

Esempi

Esempi

I gruppi di Burnside $B(d, n)$ sono n-collapsing.

I mostri di Tarski costruiti da Olshanskii e Rips sono collapsing.

Se G è nilpotente allora G è collapsing.

Teorema [J.F. Sample, A. Shalev]

Sia G un gruppo finitamente generabile residualmente finito.

G è collapsing

se e solo se

G è nilpotente-per-finito.

J.F. Sample, A. Shalev, Combinatorial conditions in residually finite groups I, *J. Algebra* **157** (2011), 43-50.

Osservazione

Osservazione

Dal teorema precedente segue che

un gruppo residualmente finito, finitamente generabile e periodico è finito,

e dunque una risposta positiva al
Problema Ristretto di Burnside.

Gruppi collapsing

Teorema [A. Shalev]

Sia G un gruppo residualmente finito.

G è collapsing

se e solo se

G soddisfa una legge positiva.

A. Shalev, Combinatorial conditions in residually finite groups II, *J. Algebra* **157** (2011), 43-50.

Definizioni

Definizione

Si definiscono due successioni di parole positive

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ e } (v_n)_{\in\mathbb{N}}$$

nelle lettere x, y ponendo:

$$u_0 = x, v_0 = y, u_{n+1} = u_n v_n, v_{n+1} = v_n u_n.$$

Si pone

$$M_c(x, y) : u_c = v_c$$

e, per $i > 1$

$$M_{c,i}(x, y) = M_c(x^i, y^i).$$

Gruppi collapsing

Teorema [A. Shalev]

Sia G un gruppo residualmente finito.

G è collapsing

se e solo se

esistono c, i tali che G soddisfa la legge $M_{c,i}(x, y)$.

A. Shalev, Combinatorial conditions in residually finite groups II, *J. Algebra* **157** (2011), 43-50.

Definizioni

Siano G un gruppo, n, m interi $n > 1, m > 1$.

Definizione

Un gruppo G vien detto (m, n)-collapsing se $|X^n| < m^n$, per ogni $X \subseteq G$, $|X| = m$.

P. Neumann ha provato che, se G è un gruppo $(m, 2)$-collapsing, allora G è finito-per-abeliano-per-finito.

Una completa descrizione dei gruppi $(m, 2)$-collapsing è dovuta a **M. Herzog, P. Longobardi, –**.

I gruppi (2,2) collapsing e (3,2) sono stati studiati da **G.A. Freiman**, utilizzando risultati e tecniche nell'ambito di quella parte della teoria dei numeri nota come

"structure theory of set addition".

Thank you for the attention !

M. Maj
Dipartimento di Matematica
Università di Salerno
via Giovanni Paolo II, 132, 84084 Fisciano (Salerno), Italy
E-mail address : mmaj@unisa.it

Bibliography

- M. Bianchi, R. Brandl, A. Gillio Berta Mauri, On the 4-permutational property *Arch. Math.* **48** (1987), 281-285.
- R.D. Blyth, Rewriting products of group elements, I *J. Algebra* **116** (1988), 506-521.
- R.D. Blyth, Rewriting products of group elements, II *J. Algebra* **118** (1988), 246-259.
- R.D. Blyth, D.J.S. Robinson, Recent progress on rewritability in groups *Proceedings of the 1987 Singapore Group Theory Conference*, 77-86, Berlin-New York 1989.
- R.D. Blyth, D.J.S. Robinson, Solution of the solubility problem for rewritable groups *J. London Math. Soc.* **41** (1990), 438-444.

Bibliography

- R.D. Blyth, D.J.S. Robinson, Insoluble groups with the rewriting property P_8 *J. Pure Appl. Algebra* **72** (1991), 251-263.
- R.D. Blyth, A.H. Rhemtulla, Rewritable products in FC-by-finite groups *Canad. J. Math.* **41** (1989), 369-384.
- R. Brandl, General bounds for permutability in finite groups *Arch. Math.* **53** (1989), 245-249.
- M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, Su di un problema combinatorio in teoria dei gruppi, *Atti Acc. Lincei Rend. fis VIII* **74** (1983), 136-142.
- M. Curzio, P. Longobardi, M. Maj, D.J.S. Robinson, On a permutational property of groups *Arch. Math.* **44** (1985), 385-389.

Bibliography

- M.I. Elashiry, D.S. Passman, Rewritable groups *J. Algebra* **345** (2011), 190-201.
- G.A. Freiman, B.M. Schein Set addition and rewritability in groups *Semigroup Forum* **39** (1989), 109-112.
- M. Herzog, P. Longobardi, M. Maj, On a combinatorial problem in group theory *Israel J. of Math., Issue dedicated to J. G. Thompson* **82** (1993), 329-340.
- J. Justin, G. Pirillo, Comments on the permutational property for semigroups *J. Algebra* **345** (2011), 190-201.
- P. Longobardi, M. Maj, The classification of groups with the small squaring property on 3 sets *Bull. Austral. Math. Soc.***46** (1992), no.2, 263-270.

Bibliography

- P. Longobardi, M. Maj, Some remarks on P_n-sequenceable groups *Arch. Math.* **60** (1993), 273-276.
- P. Longobardi, S.E. Stonehewer, Finite 2-groups of class 2 in which every product of four elements can be reordered *Illinois J. of Math.* **35** (1991), 198-219.
- P. Longobardi, M. Maj, On groups in which every product of four elements can be reordered *Arch. Math.* **49** (1987), 15-19.
- P. Longobardi, M. Maj, A.H. Rhemtulla Periodic groups with permutable subgroup products, *Math.Proc. Camb. Phil. Soc.* **106** (1989), 433-437.
- M. Maj On the derived length of groups with some permutational property, *J. Algebra* **136** (1991), 86-91.

Bibliography

M. Maj, S. Stonehewer, Nilpotent group in which every product of four element can be reordered, *Canad. J. Math.* **4 2** (1990), 1053-1066.

M. Maj, Some remark on groups with permutable subgroup product *Comm. Algebra* **17** (1989), 2539-2555.

D.S. Passman, Permutational and rewritable groups, *Proc. AMS* **147** (2019), 995-1003.

A. Restivo, C. Reutenauer , On the Burnside problem for semigroups, *J. Algebra* **89** (1984), 102-104.

Bibliography

J.F. Sample, A. Shalev, Combinatorial Conditions in residually Finite Groups I, *J. Algebra* **157** (1993), 43-50.

A. Shalev, Combinatorial Conditions in residually Finite Groups II, *J. Algebra* **157** (1993), 51-62.